Clase 10

Ley de Gauss

Ley de Gauss y Conductores

Ejemplo 22 Cálculo del campo eléctrico de una esfera maciza de radio R con carga Q distribuida uniformemente rodeada de un cascarón conductor esférico descargado con radio interior a y radio exterior b

Este sistema tiene simetría esférica. La presencia de la esfera con carga Q induce un reordenamiento de las cargas en el conductor de forma que el campo eléctrico sea nulo dentro del conductor. Por la simetría del problema nos damos cuenta que las densidades de carga inducidas en las superficies de radio a y b son uniformes. Una reflexión adicional teniendo en consideración la ley de Gauss nos aclara que la carga sobre la superficie interior del conductor debe se $-Q$ y la carga en la superficie exterior es Q. Estas cargas producen un campo como el de una carga puntual fuera de la superficie esférica donde están colocadas y un campo nulo dentro de la misma. El campo eléctrico dentro de la esfera maciza ya lo calculamos en otro ejemplo por lo tanto tendremos:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad r > b \quad \vec{\mathbf{E}} = 0 \quad a < r < b \\ \vec{\mathbf{E}} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad R < r < a \quad \vec{\mathbf{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\mathbf{r}}}{R^3} \quad r < R \end{aligned}$$

Consideremos una variación apenas mas complicada del ejemplo anterior.

Ejemplo 23: Cálculo del campo eléctrico de una esfera maciza de radio a con densidad de carga $\rho(r) = Ar$ y carga total Q rodeada de un cascarón conductor esférico con carga neta $-Q_1 < 0$, radio interior b y radio exterior c

La carga total Q de la esfera interior y la constante A están relacionadas por,

$$Q = \int \rho dV = 4\pi \int_0^a Ar^3 dr = A\pi a^4$$

En este caso la carga Q induce una densidad de carga negativa σ_b en la cara interna del cascarón que apantalla la carga de la esfera maciza de forma que el campo dentro del conductor se anula y una distribución de carga σ_c en la cara externa del conductor que puede ser positiva, negativa o nula dependiendo del módulo de Q y Q_1. Por simetría ambas distribuciones son uniformes. Por la ley de Gauss aplicada a una superficie dentro del conductor donde el campo es nulo la carga total en la superficie interior del conductor debe ser igual a $-Q$. Entonces $\sigma_b = -Q/(4\pi b^2$. Como la carga total en el conductor es $-Q_1$ la densidad de carga en la cara externa del conductor es $\sigma_c = (Q - Q_1)/4\pi c^2$. Con estas observaciones resta calcular el campo dentro de la esfera maciza lo cual se hace aplicando la ley de Gauss a superficies esféricas de radio $r < a$ para tener el resultado,

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}} &= \frac{(Q - Q_1)}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad r > c \quad \vec{\mathbf{E}} = 0 \quad b < r < c \\ \vec{\mathbf{E}} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad a < r < b \quad \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{A}{\epsilon_0}\frac{r^2\hat{\mathbf{r}}}{4} \quad r < R \end{aligned}$$